WIELKOPOLSKIE MECZE MATEMATYCZNE

FAZA GRUPOWA

mecz 7 XII 2018

ZADANIE 21

Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{120+\sqrt[3]{120+\sqrt[3]{120+\ldots}}}$ jest liczbą naturalną.

ZADANIE 22

Wykaż, że największą liczbą spełniającą nierówność $\log_2(2n)+\log_4(4n)+\log_8(8n)<14$ jest liczba 63, $(n\in N_+)$.

ZADANIE 23

Liczby $x,\ y,\ z$ są dodatnie i $xyz=1$.
Wykaż, że $(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2\geq 4(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$.

ZADANIE 24

Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+2^n\ \ ,n\geq 1\end{cases}$. Oblicz a_{2018}.

ZADANIE 25

Dany jest ciąg $a_n=\left[\frac{n}{10}\right]+\left[2018-\frac{n}{10}\right]$.
Oblicz sumę $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2018}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

ZADANIE 26

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a,b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ równa się 175.

ZADANIE 27

Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to $3<(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)<6$.

ZADANIE 28

Wykaż, że $(1^1\cdot 1!)\cdot(2^2\cdot 2!)\cdot(3^3\cdot 3!)\cdot\ldots\cdot(n^n\cdot n!)=(n!)^{n+1}$, gdzie $n\epsilon N_+$.

ZADANIE 29

Niech punkty *A*, *B*, *C*, *D* i *E* leżą na okręgu (zgodnie z ruchem wskazówek zegara). Niech *AE*= *DE* i niech punkt *P* będzie punktem przecięcia *AC* i *BD*. Niech *Q* będzie punktem na linii przechodzącej przez *A* oraz *B* takim, że *A* jest pomiędzy *B* i *Q* oraz *AQ* = *DP*. Podobnie niech *R* będzie punktem leżącym na linii przechodzącej przez *C* oraz *D* takim, że *D* leży pomiędzy *C* i *R* oraz *DR* = *AP*. Udowodnij, że *PE* jest prostopadłe do *QR*.

ZADANIE 30

Udowodnij, że w dowolnym trójkącie można wskazać środkową, której kwadrat długości jest co najmniej $\sqrt{3}$ razy większy niż pole powierzchni tego trójkąta.