

## FAZA GRUPOWA

mecze 22 XI 2018

**ZADANIE 11**Rozwiąż równanie  $x^2 - x - \sin \pi x + \frac{5}{4} = 0$ .**ZADANIE 12**Rozwiąż równanie  $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots = \sqrt{(10 \cdot 2^x - 4)}$ .**ZADANIE 13**Pole  $S$  trójkąta  $ABC$  spełnia równanie:  $S = a^2 - (b - c)^2$ , gdzie  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta leżącymi odpowiednio naprzeciwko wierzchołków  $A, B$  i  $C$  tego trójkąta. Wyznacz sinus kąta  $BAC$ .**ZADANIE 14**Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną.Udowodnij, że suma  $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2n} + 4^{2n+1}$  jest podzielna przez 5.**ZADANIE 15**Niech  $a, b, c$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $a + b + c = 0$  oraz  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Udowodnij, że  $a^2 b^2 c^2 \leq \frac{1}{54}$ .**ZADANIE 16**Dwa okręgi są styczne w punkcie  $S$ . Przez ten punkt poprowadzono proste  $KL$  i  $MN$ , odpowiednio, przecinające pierwszy okrąg w punktach  $K$  i  $M$ , a drugi w  $L$  i  $N$ . Udowodnij, że proste  $KM$  oraz  $LN$  są równoległe.**ZADANIE 17**

Wykaż, że dwa prostokąty o równych polach i równych obwodach są przystające.

**ZADANIE 18**Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{1}{8(x^3 + x^2 + 1)}$ .Udowodnij, że dla dowolnych  $x, y \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$  zachodzi nierówność  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{8} |x - y|$ .**ZADANIE 19**Niech  $a, b, c$  będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb: $(a + b + c)^2 - 9bc$  lub  $(a + b + c)^2 - 9ca$  lub  $(a + b + c)^2 - 9ab$  jest nieujemna.**ZADANIE 20**Wiadomo, że  $\cos \alpha + \cos \beta = 5\sqrt{\frac{2}{29}}$  oraz  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{29}}$ .Wyznacz wartość  $\cos(\alpha - \beta)$  w postaci  $\frac{m}{n}$ , gdzie  $n$  i  $m$  są całkowite i  $n \neq 0$ .