WIELKOPOLSKIE MECZE MATEMATYCZNE

FAZA GRUPOWA

mecz 7 XI 2018

ZADANIE 1
W trójkącie ABC wybrano punkt A_1 na boku BC, punkt C_1 na boku AB i punkt B_1 na boku AC tak, że $|A_1C| = \frac{1}{3}|BC|$, $|C_1B| = \frac{1}{3}|AB|$, $|B_1A| = \frac{1}{3}|AC|$. Proste AA_1 i CC_1 przecinają się w punkcie Q. Prosta BB_1 przecina proste AA_1 i CC_1 odpowiednio w punktach P i R. Wykaż, że pole trójkąta PQR jest równe $\frac{1}{7}S$, gdzie S oznacza pole trójkąta ABC.

ZADANIE 2
Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $2x^2 + 3xy + y^2 = 35$.

ZADANIE 3
Udowodnij, że przynajmniej jeden bok trójkąta pitagorejskiego jest podzielny przez 5.

ZADANIE 4
Wykaż, że kwadratu liczby $3m+2$, $m=1, 2, 3, \ldots$ nie można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i kwadratu liczby naturalnej.

ZADANIE 5
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ liczby $a = 2^n + 1$ oraz $b = 2^n - 1$ nie mogą być jednocześnie liczbami pierwszymi.

ZADANIE 6
Udowodnij, że jeżeli a, b i c są długościami boków trójkąta, to $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

ZADANIE 7
W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD i BE. Kąty CAD i CBE mają miary 30°. Wykaż, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

ZADANIE 8
Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\left[\frac{n+4}{2}\right] + 3n - 2 \cdot (-1)^n$ jest podzielna przez 7.

ZADANIE 9
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

ZADANIE 10
Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których wyrażenie $\frac{7k+1}{3k+4}$ ma wartość całkowitą.