

**FAZA PUCHAROWA**  
**mecz półfinałowy 11 I 2019**

**ZADANIE 41**

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną  $n$ , dla której istnieje nierównoramienny trójkąt, o kątach wewnętrznych  $\alpha, \beta, \gamma$  spełniających następujące równanie:  $\sin \frac{n\alpha}{2} + \sin \frac{n\beta}{2} + \sin \frac{n\gamma}{2} = 3$ .

Dla wyznaczonej wartości  $n$ , oblicz miary kątów  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**ZADANIE 42**

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 1$  spełniona jest nierówność:  $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$ .

**ZADANIE 43**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb  $a, b$  i  $c$  zachodzi nierówność:

$$\frac{2a+1}{b+c+1} + \frac{2b+1}{c+a+1} + \frac{2c+1}{a+b+1} \geq 3$$

**ZADANIE 44**

Dany jest równoległobok  $ABCD$ , którego dłuższą przekątną jest  $AC$ . Punkt  $C$  rzutowano prostopadle na proste  $AB$  i  $AD$ , w wyniku czego otrzymano – odpowiednio – punkty  $E$  i  $F$ .

Udowodnij, że  $|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$ .

**ZADANIE 45**

Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych  $(p, q)$ , dla których liczba  $p^2 + pq + q^2$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**ZADANIE 46**

Udowodnij, że jeżeli  $a, b, c$  są długościami boków dowolnego trójkąta, to równanie zmiennej  $x$  postaci  $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$  nie ma pierwiastków rzeczywistych.

**ZADANIE 47**

Ciąg  $(a_n)$  jest określony następująco:  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

**ZADANIE 48**

W trójkącie równobocznym  $ABC$  znajduje się punkt  $K$ , taki, że  $|AK| = 3$ ,  $|BK| = 5$ ,  $|CK| = 4$ . Wyznacz miarę kąta  $AKC$ .

**ZADANIE 49**

Liczby dodatnie  $a, b, c$  są odpowiednio piątymi, siedemnastymi oraz dwudziestymi piątymi wyrazami pewnych ciągów: arytmetycznego oraz geometrycznego. Wykaż, że:  $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$ .

**ZADANIE 50**

Wyznacz wszystkie funkcje  $f: R \rightarrow R$  spełniające dla każdych  $x, y \in R$  równanie

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$