mecz finałowy 29 I 2019

ZADANIE 51
Niech $f(x)$ będzie wielomianem, n – liczbą naturalną. Udowodnij, że jeżeli $f(x^n)$ jest podzielne przez $(x-1)$, to dzieli się również przez $(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

ZADANIE 52
Rozwiąż równanie $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

ZADANIE 53
W szachownicy $n\times n$ wpisano liczby od 1 do n^2 w ten sposób, że w polu o współrzędnych (i,j) znajduje się liczba $n(i-1)+j$. W jednym ruchu można wybrać dwa sąsiednie pola (sąsiadujące bokiem) i zastąpić liczby w tych polach ich średnią arytmetyczną (o ile ta średnia jest całkowita). Wyznacz wszystkie n, dla których można doprowadzić do sytuacji, w której w każdym polu jest wpisana ta sama liczba.

ZADANIE 54
Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$ są takie, że $x_i+x_{i+1}+x_{i+2}\le 1$ dla $i\in\{1,2,\dots,2016\}$, gdzie przyjmujemy, że $x_{2017}=x_1$, $x_{2018}=x_2$. Wyznacz największą możliwą wartość liczby $\sum_{i=1}^{2016}x_i\cdot x_{i+2}$

ZADANIE 55
Liczby dodatnie $a,b,c\ d$ spełniają warunki $a+b=c+d$ oraz $a^2+b^2>c^2+d^2$.
Udowodnij, że $a^5+b^5>c^5+d^5$.

ZADANIE 56
Wykaż, że $sin18^o=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

ZADANIE 57
Dana jest tablica liczb (n – liczba naturalna, $n\ge 1$):

1
1, 2
1, 2, 3
……………………………………………
1, 2, 3, ……………………, n-1
1, 2, 3, ……………………, n-1, n

Wyznacz n, wiedząc, że suma liczb tablicy wynosi 286.

ZADANIE 58
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x liczba $k=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2$ jest nieujemna. Wyznacz najmniejszą wartość liczby k.

ZADANIE 59
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P wewnątrz tego trójkąta. Oznaczmy przez x,y,z odległości punktu P od wierzchołków trójkąta, a przez p,q,r odległości tego punktu od prostych zawierających jego boki. Udowodnij, że wówczas $xyz\ge(p+q)(q+r)(r+p)$.

ZADANIE 60
Dana jest niepłaska łamana zamknięta złożona z czterech odcinków równej długości. Udowodnij, że odległość dowolnego punktu przestrzeni od jednego z wierzchołków łamanej jest mniejsza niż suma odległości tego punktu od pozostałych trzech wierzchołków.