



FAZA PUCHAROWA

mecz 19 XII 2018

ZADANIE 31

Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

ZADANIE 32

Wykaż, że równanie $(n+1)!m + n!p = (n+2)!$ jest spełnione przez nieskończenie wiele trójek liczb (m, n, p) , gdzie m, n, p są liczbami całkowitymi dodatnimi i p jest liczbą pierwszą.

Podaj postać ogólną rozwiązania w zależności od p .

ZADANIE 33

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x}$ w przedziale $< -7, \frac{11}{3} >$.

ZADANIE 34

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x+1)$, a wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $(x+1)$ jest wielomian $Q(x)$. Dzieląc $W(x)$ przez dwumian $(x-2)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) + 6x - 3$ i resztę 3. Wyznacz wielomian $W(x)$.

ZADANIE 35

Jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ i $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, to $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \cdot \dots \cdot (1+a_n) \geq 2^n$.

ZADANIE 36

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$. Wykaż, że jeżeli dla dwóch ujemnych liczb a i b takich, że $a \neq -1$ i $b \neq -1$ zachodzi równość $f(a) = f(b)$, to liczby a i b są równe.

ZADANIE 37

Dany jest wielomian o współczynnikach całkowitych, który w trzech różnych punktach całkowitych przyjmuje wartość 2. Wykaż, że w żadnym punkcie całkowitym nie przyjmuje on wartości 3.

ZADANIE 38

Niech punkt O oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio dwa punkty M i K takie, że $|BK| \cdot |AB| = |BO|^2$ i $|AM| \cdot |AB| = |AO|^2$. Udowodnij, że punkty M , O i K leżą na jednej prostej.

ZADANIE 39

Okrąg wpisany w trójkąt ABC dzieli jedną ze środkowych tego trójkąta na trzy równe części. Wykaż, że stosunek długości boków trójkąta wynosi $5 : 10 : 13$.

ZADANIE 40

W trójkącie ABC środkowe AD i BE są wzajemnie prostopadłe.

Udowodnij, że $\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \geq \frac{2}{3}$, gdzie $\alpha = |\angle BAC|$ oraz $\beta = |\angle ABC|$.