40. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

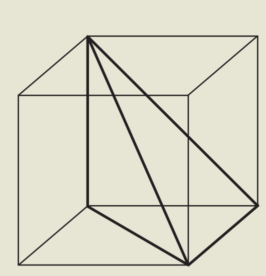
W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8.
Mówiąc krótko: **należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!**

Praca może być napisana na dowolnie wybrany matematyczny temat. Jako inspiracje proponujemy poniższe tematy:

1. Wypełnianie przestrzeni czworościanami

Nie jest trudno wypełnić szczelnie przestrzeń jednakowymi sześcianami – każdy wskaże bez trudu kilka sposobów. Jest niemożliwe szczelne wypełnienie przestrzeni jednakowymi czworościanami foremnymi – co drugi potrafi to udowodnić. Trochę trudniej będzie wykazać, że pokazanym na rysunku 1 czworościanem przestrzeń można szczelnie wypełnić. A jak wyglądają wszystkie czworościany, którymi można szczelnie wypełnić przestrzeń?

Hasła: III i XVIII problem Hilberta, parkietaż, krystalografia



2. Złociaki

Wyobraźmy sobie, że trafiliśmy do dziwnego kraju, w którym jedynymi dostępnymi środkami płatniczymi są monety o nominałach 4 i 7. Jeżeli znajdziemy się w sklepie, w którym kasa jest zupełnie pusta, to nie chcąc tracić pieniędzy, będziemy komponowali zakupy warte 4, 7, 8, 11, 12 albo parę innych. Kwoty równej 9 nie uzyskamy z dostępnych nominałów. Zbiór wszystkich kwot, które można uzyskać z nominałów a, b, nazwijmy $P(a,b)$.

Hipoteza

Dla danych liczb względnie pierwszych $a>b\geq 2$ definiujemy $c(a,b)$ jako najmniejszą liczbę naturalną c taką, że obie liczby c, $c+1$ należą do $P(a,b)$. Wówczas $c(a,b)$ można otrzymać w następujący sposób. Niech $a/b=[c_0;c_1,\dots,c_k]$ będzie takim rozwinięciem liczby a/b na ułamek łańcuchowy, że $c_k>1$ (takie rozwinięcie jest jedyne). Niech $f/g=[c_0;c_1,\dots,c_{k-1}]$. Wówczas

$$c(a,b)=\min(ag,bf).$$

Powyższe, bez dowodu czy kontrprzykładu, pozostaje tylko hipotezą…

Hasła: artykuł w *Delcie* „Kraina dwóch monet”

3. Ukryta podzielność

Kiedy wartości wielomianu o współczynnikach całkowitych są dla wszystkich całkowitych argumentów podzielne przez ustaloną liczbę n? Na pewno wtedy, gdy wszystkie współczynniki danego wielomianu są podzielne przez n. To tak oczywisty przypadek, że nawet nie warto o nim wspominać. Ale czy tylko wtedy? Co będzie, kiedy współczynniki wielomianu nie mają wspólnego dzielnika większego od 1? Wtedy mimo wszystko wartości wielomianu mogą być podzielne przez ustaloną liczbę większą od 1!

Najprostszy przykład to wielomian, którego wartość dla dowolnej liczby całkowitej jest parzysta. Podobnie, wartości wielomianu są zawsze podzielne przez 6. I stąd już można wypłynąć na szerokie wody badacza ukrytych podzielności. Można znaleźć mnóstwo takich wielomianów. Może uda się je jakoś sklasyfikować lub udowodnić jakieś twierdzenia o tym, kiedy taka ukryta podzielność na pewno występuje albo kiedy nie występuje.

Termin zgłaszania prac: 30 kwietnia 2018
Finał: wrzesień 2018

deltami@mimuw.edu.pl
Delta.czasopismo

Regulamin konkursu, przykładowe tematy prac, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:
www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich